



NUMERICAL SOLUTION OF THERMOPLASTIC DYNAMIC DEPENDENCE PROBLEM

Yusufbay Yusupov^{1,2}

Davlatjon Isoqov³

National University of Uzbekistan, Kimyo International University in Tashkent, Jizzakh State Pedagogical University

KEYWORDS

parabolic, hyperbolic,
isotropic, deformation,
thermoplastic, revealing and
non-revealing schemes,
dynamic

ABSTRACT

It is devoted to the creation of a mathematical model that expresses the deformation processes of isotropic bodies in a parabolic-hyperbolic state, taking into account the temperature, and corresponding calculation models. Calculation algorithms were built based on discrete analysis of mathematical models and software was created in C# language. Concretely specific issues have been resolved based on the software.

2181-2675/© 2023 in XALQARO TADQIQOT LLC.

DOI: 10.5281/zenodo.7883150

This is an open access article under the Attribution 4.0 International(CC BY 4.0) license (<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/deed.ru>)

¹ Ph.D., Associate Professor of the Faculty of Applied Mathematics and Intellectual Technologies, National University of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan (yusabio@gmail.com)

² Ph.D., Associate Professor of Applied Informatics Department, Kimyo International University in Tashkent, Uzbekistan

³ Master's student of the Faculty of Mathematics and Informatics, Jizzakh State Pedagogical University, Jizzakh, Uzbekistan

ТЕРМОПЛАСТИК ДИНАМИК БОҒЛИҚЛИ МАСАЛАНИ СОНЛИ ЕЧИШ

**KALIT SO‘ZLAR/
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:**

параболик, гиперболик, изотроп, деформация, термопластик, ошкор ва ошкормас схемалар, динамик

ANNOTATSIYA/АННОТАЦИЯ

Параболик-гиперболик ҳолатдаги изотроп жисмларнинг деформацияланиш жараёнларини температурани ҳисобга олган ҳолда ифодаладиган математик модел ва унга мос ҳисоблаш моделларини тузишга бағишланган. Математик моделларнинг дискрет анализлари асосида ҳисоблаш алгоритмлари қурилган ва C# тилида дастурий таъминоти яратилди. Дастурий таъминот асосида канкрет аниқ масалалар ечилди.

Кириш. Маълумки, $\Omega = \{a \leq x \leq b, t_0 \leq t \leq T^*\}$ соҳада изотроп стержень кўринишидаги қаттиқ жисмлар учун термопластик динамик боғлиқ масалалари биргаликдаги чизиқсиз гиперболик турдаги ҳаракат тенгламаси[4]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = K_{21} \frac{\partial}{\partial x} (K_{22} \frac{\partial u}{\partial x}) + K_{23} \frac{\partial u}{\partial x} + K_{24} u + K_{25} \frac{\partial T}{\partial x} + P \tag{1}$$

ва параболик турдаги иссиқлик ўтказувчанлик тенгламаси

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K_{11} \frac{\partial}{\partial x} (K_{12} \frac{\partial T}{\partial x}) + K_{13} \frac{\partial T}{\partial x} + K_{14} T + K_{15} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + Q \tag{2}$$

ёрдамида умумий кўринишда ифодаланиши мумкин. Бу ерда K_{ij} , P ва Q ҳадлар умуман олганда x, t, T ва u ларнинг чизиқсиз функциялари бўлиб, хусусий ҳолларда ўзгармаслар сифатида аниқ кўринишларда берилади [1-2]. Масала моҳиятига кўра (1)-(2) кўринишдаги гиперболо-параболик турдаги тенгламалар системасини ушбу бошланғич

$$u|_{t=t_0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=t_0} = \psi(x), \quad T|_{t=t_0} = \eta_0(x) \tag{3}$$

ва чегаравий шартлар

$$u|_{x=a} = \chi_1(t), \quad u|_{x=b} = \chi_2(t) \tag{4}$$

$$T|_{x=a} = \xi_1(t), \quad T|_{x=b} = \xi_2(t) \tag{5}$$

ёрдамида сонли ечиш алгоритми ва программасини яратиш билан бир қаторда баъзи бир итерацион сонли ечиш усулларини таҳлил қилиш кабилар кўзда тутилади. Бу ерда масала коррект қўйилган деб фараз қилинади. Масала маълум бир чизиқсизликларни ҳам ҳисобга олган ҳолда умумий кўринишда ифодаланганлиги боис, тўр усулида итерацион ечиш усулларини қўллашга тўғри келади. Бунинг учун дастлаб берилган Ω соҳа Ox ўқи бўйича $h = (b - a)/(m - 1)$ ва Ot ўқи бўйича $\tau = (T^* - t_0)/(n - 1)$ қадамлар билан $x_i = a + (i - 1)h$ ва $t_j = t_0 + (j - 1)\tau$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$) чизиқлар ёрдамида дискретлаштириб олинади [3]. Масалада қатнашган барча ҳадларни чекли

айирмали кўринишга ўтказиб олишда тенгламаларда қатнашаётган ва чизиқсиз бўлиши кўзда тутилаётган барча функцияларни чизиқлаштиришнинг Пикар ёки Ньютон усулларида фойдаланиб алмаштириш кўзда тутилади. Маълумки, бундай итерацион жараёнларнинг аниқ ечимга қанчалик тез ёки секин яқинлашиши эса танланаётган бошланғич яқинлашишларга [6], қўлланилаётган чизиқлаштириш усулига ва ошкор ёки ошкормас схемалардан қайси бири қўлланилганига боғлиқ бўлади [7-9]. Одатда, тенгламалардаги $K_{i,j}$ коэффициентларни чизиқсизлаштиришда вақт бўйича битта олдинги қатламдаги ҳисоблашлардан ёки Пикар усулидан фойдаланиш мумкин. Q ва P функцияларни эса чизиқлаштиришнинг бевосита Ньютон усулидан фойдаланиш мақсадга мувофиқдир. Мана шуларга кўра стерженьдаги температура тарқалишини аниқлашни қуйидаги ошкор ва ошкормас схемалар ёрдамида ифодаланган

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = K_{11i}^j \left\{ K_{12i+1}^j \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{h^2} - K_{12i}^j \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{h^2} \right\} + K_{13i}^j \frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2h} + K_{14i}^j T_i^j + K_{15i}^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j - u_i^{j+1} + u_i^j}{h\tau} + Q_i^j + \mu_1 Q_{Ti}^j (T_i^{j+1} - T_i^j) \tag{6}$$

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{\tau} = K_{11i}^j \left\{ K_{12i+1}^j \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{h^2} - K_{12i}^j \frac{T_i^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{h^2} \right\} + K_{13i}^j \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{2h} + K_{14i}^j T_i^{j+1} + K_{15i}^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j - u_i^{j+1} + u_i^j}{h\tau} + Q_i^j + \mu_1 Q_{Ti}^j (T_i^{j+1} - T_i^j) \tag{7}$$

тенгламалар системасига ва унинг таъсирида кўчишнинг ўзгаришини аниқлашни эса уч қатламли ошкор ва ошкормас схемалар ёрдамида ифодаланган [10-11]

$$\frac{u_i^{j+2} - 2u_i^{j+1} + u_i^j}{\tau^2} = K_{21i}^j \left\{ K_{22i+1}^j \frac{u_{i+1}^j - u_i^j}{h^2} - K_{22i}^j \frac{u_i^j - u_{i-1}^j}{h^2} \right\} + K_{23i}^j \frac{u_{i+1}^j - u_{i-1}^j}{2h} + K_{24i}^j u_i^j + K_{25i}^j \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{2h} + P_i^j + \mu_2 P_{ui}^j (u_i^{j+2} - u_i^{j+1}) \tag{8}$$

$$\frac{u_i^{j+2} - 2u_i^{j+1} + u_i^j}{\tau^2} = K_{21i}^j \left\{ K_{22i+1}^j \frac{u_{i+1}^{j+2} - u_i^{j+2}}{h^2} - K_{22i}^j \frac{u_i^{j+2} - u_{i-1}^{j+2}}{h^2} \right\} + K_{23i}^j \frac{u_{i+1}^{j+2} - u_{i-1}^{j+2}}{2h} + K_{24i}^j u_i^{j+2} + K_{25i}^j \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{2h} + P_i^j + \mu_2 P_{uj}^j (u_i^{j+2} - u_i^{j+1}) \tag{9}$$

кўринишидаги тенгламалар системасини ечишга олиб келиш мумкин. Бу ерда μ_1 ва μ_2 параметрлар Q ва P ларни Пикар ($\mu_1 = \mu_2 = 0$) ёки Ньютон ($\mu_1 = \mu_2 = 1$) усуллари ёрдамида чизиқлаштириш учун киритилган ($j = \overline{1, N-1}$; $i = \overline{1, m-1}$). Буларни соддалаштиргач, мос равишда

$$T_i^{j+1} = \left\{ \tau \left[\begin{aligned} &K_{11i}^j \left(K_{12i+1}^j \frac{T_{i+1}^j - T_i^j}{h^2} - K_{12i}^j \frac{T_i^j - T_{i-1}^j}{h^2} \right) + K_{13i}^j \frac{T_{i+1}^j - T_{i-1}^j}{2h} + \right. \\ &\left. + K_{14i}^j T_i^j + K_{15i}^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i+1}^j - u_i^{j+1} + u_i^j}{h\tau} + Q_i^j - \mu_1 Q_{T_i}^j T_i^j \right] + T_i^j \right\} / (1 - \tau \mu_1 Q_{T_i}^j), \end{aligned} \quad (10)$$

$$A_1 T_{i-1}^{j+1} + C_1 T_i^{j+1} + B_1 T_{i+1}^{j+1} = D_1, \quad (11)$$

$$u_i^{j+2} = \left\{ 2u_i^{j+1} - u_i^j + \tau^2 \left[\begin{aligned} &K_{21i}^j \left\{ K_{22i+1}^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h^2} - K_{22i}^j \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h^2} \right\} + K_{23i}^j \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{2h} + \right. \\ &\left. + K_{24i}^j u_i^j + K_{25i}^j \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_{i-1}^{j+1}}{2h} + P_i^j - \mu_2 P_{u_i}^j u_i^{j+1} \right] \right\} / (1 - \mu_2 \tau^2 P_{u_i}^j), \end{aligned} \quad (12)$$

$$A_2 u_{i-1}^{j+2} + B_2 u_i^{j+2} + C_2 u_{i+1}^{j+2} = D_2 \quad (13)$$

кўринишдаги ҳисоблаш формулаларига эга бўламиз. Натижавий ҳисоблашларни (10)-(13) тенгламаларнинг $\{T_i^{j+1}; u_i^{j+2}\}$ жуфтлик кўринишидаги комбинацияларидан ҳосил бўладиган қуйидаги тўртта вариантда амалга ошириш мумкин[12-14]. Буларнинг орасидан самаралисини танлаб олиш эса, фақатгина бирор муайян, қолаверса аниқ ечими маълум бўлган тест масаласи ёрдамидагина амалга оширилиши мумкин:

$$1\text{-Вариант: } \begin{cases} (10) \\ (12) \end{cases} \quad 2\text{-Вариант: } \begin{cases} (10) \\ (13) \end{cases} \quad 3\text{-Вариант: } \begin{cases} (11) \\ (12) \end{cases} \quad 4\text{-Вариант: } \begin{cases} (11) \\ (13) \end{cases}$$

Барча $\{T_i^{j+1}; u_i^{j+2}\}$ жуфтликлар системаси кўринишидаги вариантлар юқорида

берилган (3)-(5) шартлар: $T_i^1 = \eta_0(x_i)$, $T_1^j = \xi_1(t_j)$, $T_m^j = \xi_2(t_j)$, $u_i^1 = \varphi(x_i)$, $\frac{u_i^2 - u_i^1}{\tau} = \psi(x_i)$,

$u_i^j = \chi_1(t_j)$, $u_m^j = \chi_2(t_j)$ ёрдамида ечилади. Бу ерда A_s, B_s, C_s, D_s – коэффициентлар (7) ва

(9) тенгламалардан аниқланади ($s=1,2$); $K_{11i}^j = K_{11}(x_i, t_j, T_i^j, u_i^j)$,

$K_{12i}^j = K_{12}(x_i, t_j, T_i^j, u_i^j)$, ..., $K_{25i+1}^j = K_{25}(x_{i+1}, t_j, T_{i+1}^j, u_{i+1}^j)$,

$P_i^j = P(x_i, t_j, T_i^j, u_i^j)$, $Q_i^j = Q(x_i, t_j, T_i^j, u_i^j)$, $P_{u_i}^j = P_u(x_i, t_j, T_i^j, u_i^j)$, $Q_{T_i}^j = Q_T(x_i, t_j, T_i^j, u_i^j)$ -

берилади.

Тест масаласи. Тест масаласи сифатида (1)-(5) масалада берилганларнинг ушбу $K_{11} = K_{12} = 1$, $K_{13} = K_{14} = 0$, $K_{15} = T^{n_1}$, $K_{21} = K_{22} = 1$, $K_{23} = K_{24} = 0$, $K_{25} = T^{n_2}$, $Q = T(T^{n_1}u - 2)$, $Q_T = n_1 T^{n_1}u - 2$, $P = T^{n_2+1}$, $P_u = 0$, $\chi_2(t) = \sin(1+t)$, $\xi_1(t) = e^{-t}$, $\xi_2(t) = e^{-(1+t)}$ қийматларида аниқ ечимлари $T(x,t) = e^{-(x+t)}$ ва $u(x,t) = \sin(x+t)$ кўринишда маълум бўлган ҳол учун ҳисоблаш экспериментлари ўтказилди. Бунда Ω соҳани ўзгармас қадамли дискрет соҳага келтириш учун $a=0$, $b=1$, $t_0 = 0, T^* = 1$, $m = n = 10$, $n_1 = 4, n_2 = 2$ ва вақт бўйича қатламлар орасидаги чизиқлаштириш усулларида фойдаланишда итерацион жараённинг яқинлашиши учун аниқликни $\epsilon=0.001$ деб олинди. Жумладан, 3-вариант ёрдамида олиб борилган ҳисоблашларда итерацион жараёндаги итерациялар сони 3

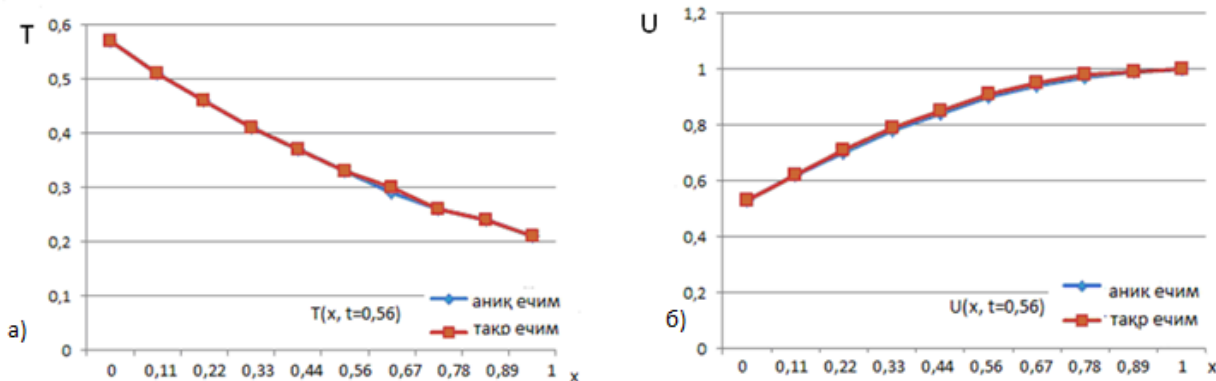
тадан ошмади. P ва Q функцияларни Ньютон усулида чиқиқлаштирилганда ($\mu_1 = \mu_2 = 1$) нисбий хатоликларнинг максимал қиймати 1.58 дан, Пикар усулида ($\mu_1 = \mu_2 = 0$) эса 2.08 дан ошмайди. Чиқиқсиз ҳадларни бевосита вақт бўйича олдинги қатламда ҳисоблаш орқали ҳам чиқиқлаштириш мумкин. Бу усулда олинган натижалар Пикар усулида олинган натижалар билан бир хил бўлиб, Ньютон усулида олинган натижаларнинг эса яхшироқ эканлигини айтиб ўтиш лозим. Ҳисоблаш экспериментларининг натижалари қуйидаги 1-2 жадвалларда Ω соҳанинг $x = 0.222, 0.556, 0.889$; $t = 0.222, 0.556$ қийматларида масаланинг аниқ ечими билан чиқиқлаштиришнинг ҳар хил усуллари ёрдамида олинган тақрибий ечимлар, ҳамда улар орасидаги абсолют ва нисбий хатоликлар келтирилади.

1-жадвал.

t/x	U(x,t)	0.222	0.556	0.889
0.222	Аниқ ечим (U)	0.4300	0.7017	0.8962
	Тақр.ечим: Ньютон усули (U_N)	0.4331	0.7085	0.9007
	Тақр.ечим: Пикар усули (U_P)	0.4330	0.7085	0.9007
	Тақр.ечим: Вақт бўйича (U_B)	0.4330	0.7085	0.9007
	$\Delta U_N = U - U_N $ Ньютон усулида	0.0031	0.0068	0.0045
	$\Delta U_P = U - U_P $ Пикар усулида	0.0030	0.0068	0.0045
	$\Delta U_B = U - U_B $ Вақт бўйича	0.0030	0.0068	0.0045
	$ \Delta U_N / U $ (%) Ньютон усулида	0.7279	0.9763	0.5008
	$ \Delta U_P / U $ (%) Пикар усулида	0.7010	0.9756	0.5039
	$ \Delta U_B / U $ (%) Вақт бўйича	0.7010	0.9756	0.5039
0.556	Аниқ ечим (U)	0.7017	0.8962	0.9920
	Тақр.ечим: Ньютон усули (U_N)	0.7085	0.9073	0.9949
	Тақр.ечим: Пикар усули (U_P)	0.7080	0.9071	0.9949
	Тақр.ечим: Вақт бўйича (U_B)	0.7080	0.9071	0.9949
	$\Delta U_N = U - U_N $ Ньютон усулида	0.0068	0.0111	0.0045
	$\Delta U_P = U - U_P $ Пикар усулида	0.0063	0.0109	0.0045
	$\Delta U_B = U - U_B $ Вақт бўйича	0.0063	0.0109	0.0045
	$ \Delta U_N / U $ (%) Ньютон усулида	0.9737	1.5763	0.2877
	$ \Delta U_P / U $ (%) Пикар усулида	0.8994	1.5510	0.2919
	$ \Delta U_B / U $ (%) Вақт бўйича	0.8994	1.5510	0.2919

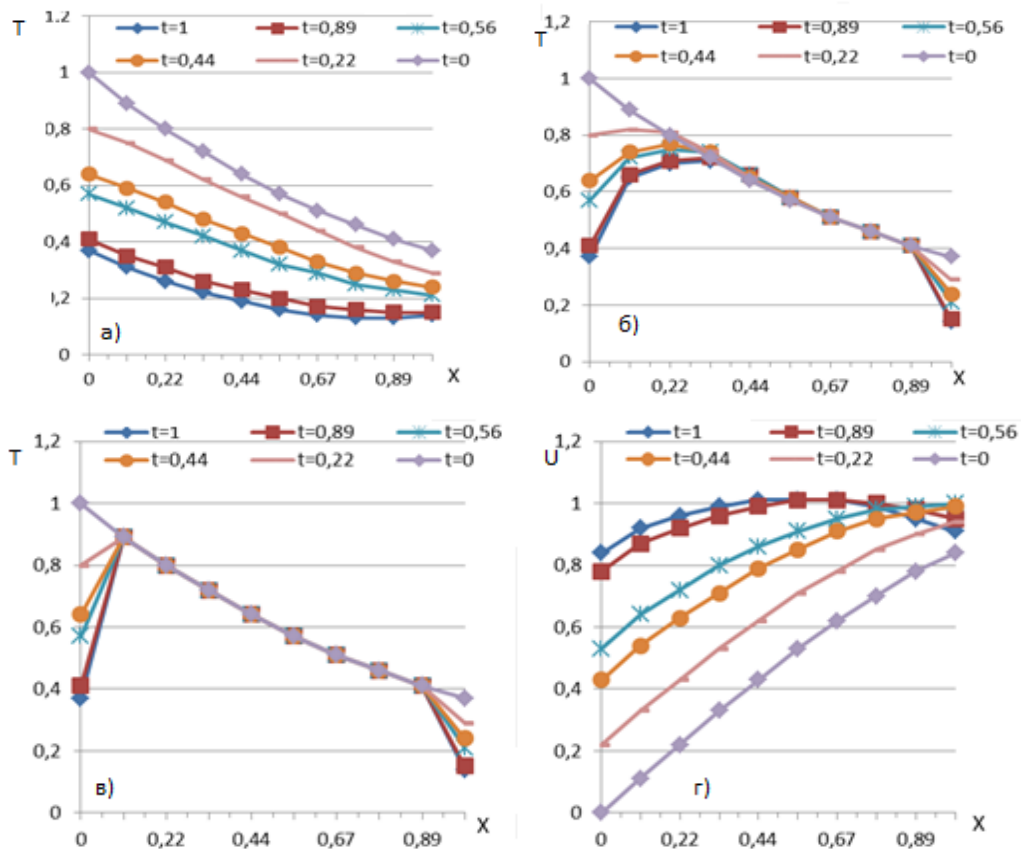
t/x	T(x,t)	0.222	0.556	0.889
0.222	Аниқ ечим (T)	0.6412	0.4594	0.3292
	Тақр.ечим: Ньютон усули (T _Н)	0.6409	0.4595	0.3293
	Тақр.ечим: Пикар усули (T _П)	0.6343	0.4512	0.3262
	Тақр.ечим: Вақт бўйича (T _В)	0.6343	0.4512	0.3262
	$\Delta T_N = T - T_N $ Ньютон усулида	0.0003	0.0001	0.0001
	$\Delta T_P = T - T_P $ Пикар усулида	0.0069	0.0082	0.0030
	$\Delta T_B = T - T_B $ Вақт бўйича	0.0069	0.0082	0.0030
	$ \Delta T_N / T $ (%) Ньютон усулида	0.0441	0.0146	0.0416
	$ \Delta T_P / T $ (%) Пикар усулида	1.0731	1.7916	0.9161
	$ \Delta T_B / T $ (%) Вақт бўйича	1.0731	1.7916	0.9161
0.556	Аниқ ечим (T)	0.4594	0.3292	0.2359
	Тақр.ечим: Ньютон усули (T _Н)	0.4598	0.3300	0.2363
	Тақр.ечим: Пикар усули (T _П)	0.4539	0.3222	0.2334
	Тақр.ечим: Вақт бўйича (T _В)	0.4539	0.3222	0.2334
	$\Delta T_N = T - T_N $ Ньютон усулида	0.0004	0.0008	0.0001
	$\Delta T_P = T - T_P $ Пикар усулида	0.0056	0.0069	0.0030
	$\Delta T_B = T - T_B $ Вақт бўйича	0.0056	0.0069	0.0030
	$ \Delta T_N / T $ (%) Ньютон усулида	0.0907	0.1651	0.1621
	$ \Delta T_P / T $ (%) Пикар усулида	1.2098	1.5122	1.0515
	$ \Delta T_B / T $ (%) Вақт бўйича	1.2098	1.5122	1.0515

Қуйидаги расмларда (1)-(5) масалани чизиқсиз тест масаласида ечиш учун Ньютон усули қўлланилгандаги, вариантлардан энг самаралиси бўлган 3-вариант ёрдамида олинган сонли ва аниқ ечимларнинг графиклари тасвирланган. Графикларнинг устма-уст тушаётганлиги қўлланилаётган усулнинг яхшилигини, шунга мос алгоритм ва программанинг эса тўғрилигини тасдиқлайди.

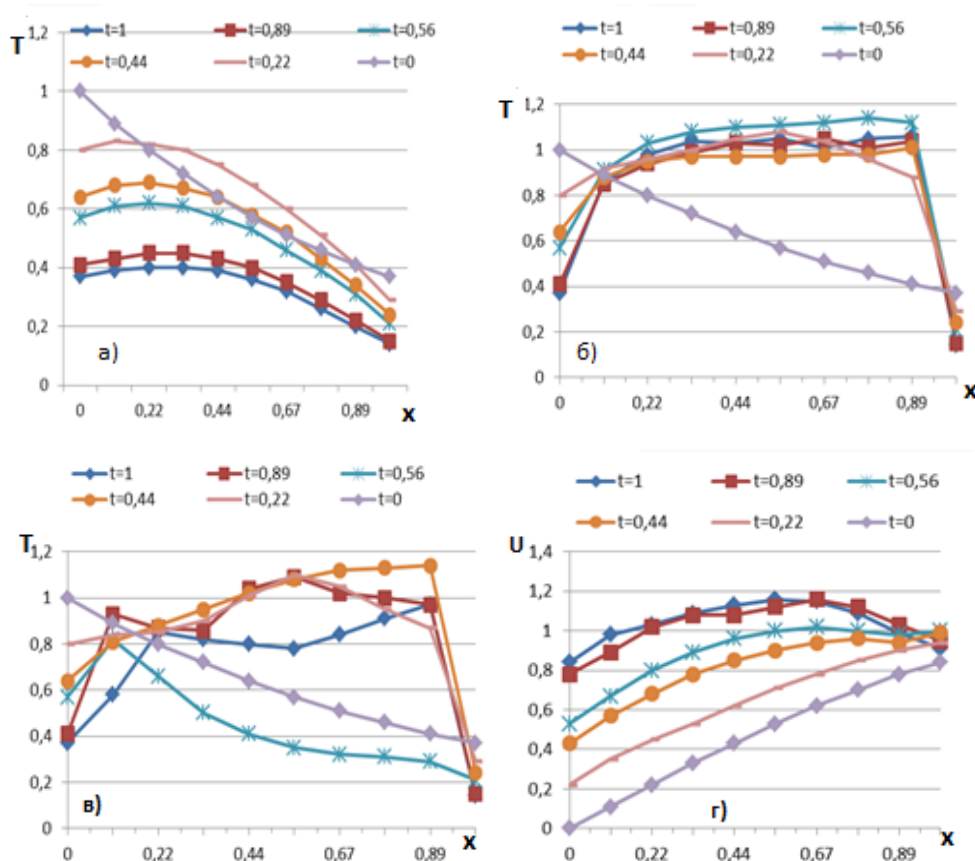


1-расм. Фиксирланган $t=0.56$ вақтдаги: а) температуранинг. б) кўчишнинг Ox ўқи бўйича аниқ ва тақрибий ечимларнинг ўзгариш графиклари.

Мана шуларга асосланиб, юқорида келтирилган тест масаласи учун иссиқлик манбаси сифатида қатнашаётган Q функциянинг $Q=0$ ва $Q=e^T$ бўлган ҳолларида тенгламаларда n_1 ва n_2 - даражали кўринишларда берилган чизиқсиз коэффицентлар ($K_{15} = T^{n_1}$ ва $K_{25} = T^{n_2}$)нинг сонли ечимларга таъсирини ўрганиш бўйича ҳисоблаш экспериментлари олиб борилди. Жумладан, $n_2 = 2$ ўзгармас деб, n_1 нинг 0 дан бошлаб, то 126 гача бўлган қийматларида олинган сонли натижаларнинг ўзгаришлари 2- ва 3-расмларда график кўринишларда келтирилган. Хусусан, $Q=0$ бўлганда температура функциясининг ҳар хил вақтлардаги ($t=0; 0.22; 0.44; 0.56; 0.89; 1$) графиклари (3) - бошланғич шартдаги $\eta_0(x)$ функциясининг графигидан пастда жойлашиши, $\eta_0(x)$ нинг температура учун юқори ечим сифатида қаралиши мумкинлигини кўрсатади. Кўчиш функцияси учун эса аксинча, яъни кўчиш функциясининг графиклари (3)-бошланғич шартдаги $\varphi(x)$ функциясининг графигидан юқорида жойлашиши кузатилди. Бу эса $\varphi(x)$ нинг кўчиш функцияси учун қуйи ечим сифатида олиниши мумкинлигини намоён қилади. Манба функциясининг ўзгариши $Q=e^T$ кўринишида бўлганда эса, температура ўзгариши бўйича ўзига хос ҳолатларни кузатиш мумкин, лекин кўчиш функциясида бундай кескин ўзгаришлар кузатилмади (3-расм).



2-расм. Тенгламада $Q=0$ ҳол учун температуранинг а) $n_1=0$; б) $n_1=10$; в) $n_1=126$ ва кўчишнинг г) $n_1=126$ ўзгариши графиклари.



3-расм. Тенгламада $Q = e^T$ ҳол учун температуранинг а) $n_1=0$; б) $n_1=10$; в) $n_1=16$ ва кўчишининг г) $n_1=16$ ўзгариши графиклари.

Хулоса қилиб айтганда, (1)-(5) кўринишдаги масалаларни сонли ечиш учун тавсия қилинаётган алгоритм варианти, шу асосида яратилган программалар мажмуаси ва олинган натижалар муайян кўринишдаги чизиқсиз амалий масалаларни ечиш учун методик кўрсатма бўлиб хизмат қилиши мумкин.

АДАБИЁТЛАР

1. Khaldjigitov, A. A., Kalandarov, A. A., & Yusupov, Y. S. (2019). Coupled problems of thermoelasticity and thermoplasticity. *T. "Fan va texnologiya"*, 203.
2. Yusupov, Y. S. (2022). Numerical Solution of a TwoDimensional Dynamic Related Problem of Thermal Support. *Eurasian Journal of Engineering and Technology*, 5, 125-134.
3. Khaldjigitov, A. A., Yusupov, Y. S., Khudazarov, R. S., & Sagdullaeva, D. A. (2019). On the thermoplasticity constitutive relations for isotropic and transversely isotropic materials. *International Journal of Mechanical and Production Engineering Research and Development (IJMPERD)*, 9(4), 467-478.
4. Khaldjigitov, A. A., Yusupov, Y. S., Rasedee, A. F. N., & Long, N. N. (2019, April). Mathematical modeling and simulation of the coupled strain space thermoplasticity

problems. In *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 1212, No. 1, p. 012023). IOP Publishing.

5. Юсупов, Ю. С. (2019). Численное решение связанной динамической термоупругопластической задачи, основанной на деформационной теории. *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, (4 (22)), 101-110.

6. Saidjonovich, Yusupov Yusufbay, and Babadjanov Mumin Radjapovich. "Numerical solution of a Three-Dimensional Coupled thermoplastic problem based on deformation theory" *The International Journal of Science & Technoledge* 7.9 (2019).

7. Халджигитов А.А., Юсупов Ю.С., & Адамбаев У.Э. (2019). Численное моделирование связанной двумерной динамической задачи термопластичности. *Вестник Илм сарчашмалари*, (11), 12-15.

8. Yusupov, Y., & Khaldjigitov, A. A. (2017). Mathematical and numerical modeling of the coupled dynamic thermoplastic problem. *Universal Journal of Computational Mathematics*, 5(2), 34-43.

9. Юсупов Ю. С., Хасанов К. А. Численное решение одномерной термопластической задачи для изотропных тел //Управление инновациями: теория, методология, практика. – 2014. – №. 11. – С. 131-138.

10. Юсупов Ю. С., Хужакулов Ш. А., Худаяров Ш. Ш. Численное решение двухмерной связанной термопластической задачи основанной на деформационной теории //Управление инновациями: теория, методология, практика. – 2014. – №. 11. – С. 138-144.

11. Yusupov Y. S., Khaldjigitov A. A. Numerical solution of the coupled dynamic problems based on the deformation and flow thermoplasticity theories.

12. Khaldjigitov, A. A., Qalandarov, A. A., Yusupov, Y. S., & Sagdullaeva, D. A. (2013). Numerical modelling of the 1D thermoplastic coupled problem for isotropic materials. *Acta TUIT*, 1.

13. Yusupov, Yu S. "Numerical Solution of a TwoDimensional Dynamic Related Problem of Thermal Support." *Eurasian Journal of Engineering and Technology* 5 (2022): 125-134.

14. Ю.С. Юсупов; С.А. Абдувоитов. Математическое и численное решение двумерной связанной задачи термоупругости на основе деформацион теории. *Peri. Jour. of Mode. Phil. Soci. Scie. and Huma*. **2022**, 11, 189-199.

15. A. A. Khaldjigitov, Yu. S. Yusupov, U. E. Adambaev, and D. A. Sagdullaeva, "Numerical solution of two-dimensional coupled thermoplastic problems", AIP Conference Proceedings 2637, 040007 (2022) <https://doi.org/10.1063/5.0118532>

16. Y.S. Yusupov and Ch.M. Xolmatova, "Numerical modelling of the one-dimensional thermoplastic coupled problem for isotropic materials using deformation theory", *Euro.Jour.Eng. Tech*, vol. 15, pp. 71–77, Feb. 2023.