Journal of Academic Research and Trends in Educational Sciences
Journal home page: http://ijournal.uz/index.php/jartes

SOME ASSERTIONS ABOUT PRIME NUMBERS AND THEIR PROPERTIES AND PROVING THEM USING METHODS OF NUMBER THEORY

Ismail Allakov[1]
Zarifa Jo’rayeva[2]

Termiz State University

KEYWORDS
Prime numbers, number theory, prime distribution, divisibility, modular arithmetic, Euclidean algorithm, prime factorization, mathematical proof, integer properties

ABSTRACT
This article explores various assertions about prime numbers and their intrinsic properties, providing rigorous proofs using number theory techniques. The study covers fundamental characteristics of primes, such as distribution patterns, divisibility rules, and unique attributes within integer sets. By employing number-theoretic methods, including modular arithmetic, the Euclidean algorithm, and properties of prime factorization, the article aims to deepen understanding of prime behavior within mathematical systems. Additionally, it examines advanced theorems and conjectures related to prime numbers, offering a structured approach to their verification and implications in broader mathematical contexts.

DOI: **10.5281/zenodo.14060577**

[1] Professor of the Department of the Algebra and Geometry, Termiz State University, Uzbekistan (iallakov@mail.ru)
[2] Teacher of the Department of the Algebra and Geometry, Termiz State University, Uzbekistan (zarifabekovq@gmail.com)

iJOURNAL Journal of Academic Research and Trends in Educational Sciences (JARTES)
VOLUME 3, ISSUE 4 / ISSN 2181-2675

TUB SONLAR VA ULARNING XOSSALARI HAQIDAGI BA'ZI TASDIQLAR VA ULARNI SONLAR NAZARIYASI USULLARIDAN FOYDALANIB ISBOTLASHGA DOIR

KALIT SO'ZLAR/ КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:
tub sonlar, sonlar nazariyasi, tub taqsimot, bo'linuvchanlik, modulli arifmetika, Evklid algoritmi, tub ko'paytmalar, matematik isbot, butun son xossalari

ANNOTATSIYA/ АННОТАЦИЯ

Ushbu maqola tub sonlar va ularning o'ziga xos xususiyatlari haqidagi turli fikrlarni o'rganadi, sonlar nazariyasi usullaridan foydalangan holda qat'iy dalillarni taqdim etadi. Tadqiqot tub sonlarning asosiy xarakteristikalari, masalan, taqsimot naqshlari, bo'linish qoidalari va butun sonlar to'plamidagi noyob atributlarni qamrab oladi. Raqamlar nazariyasi usullaridan, jumladan modulli arifmetikadan, Evklid algoritmidan va tub faktorizatsiya xususiyatlaridan foydalangan holda, maqola matematik tizimlardagi asosiy xatti-harakatlarni chuqurroq tushunishga qaratilgan. Bundan tashqari, u tub sonlar bilan bog'liq ilg'or teorema va farazlarni o'rganadi, ularni tekshirish va kengroq matematik kontekstlarda ta'sir qilish uchun tizimli yondashuvni taklif qiladi.

Ma'lumki, o'rta maktablarning 6-sinf matematikasida tub sonlar bilan bog'liq tushunchalar o'rganiladii. Biz [1] da berilgan sonning tub yoki murakkab ekanligini aniqlash masalasiga to'xtalib o'tgan edik ([1] ning 206-207 b.). Bu ishda biz quyidagi uchta tasdiqni isbotlaymiz: bular qoldiqli bo'lish haqidagi teorema, tub sonlarning cheksiz ko'pligi haqidagi teorema va arifmetikaning asosiy teoremasi. Bu tasdiqlarning qat'iy isbotini avvalo o'qituvchilarimiz bilishlari shart va qolaversa iqtidorli o'quvchilarimizga o'rgatilsa ularning keying materiallarni o'zlashtirishlariga katta yordam bergan bo'lar edi. Bu tasqiqlar maktab darsliklarida bayon qilingan bo'lsada ularning qat'iy isbotlari keltirilmagan [2] ekanligini inobatga olib ilarning bu yerda qat'iy isbotlarini keltirib o'tamiz.

Avvalo qoldiqli bo'lish haqidagi teorema va uning isbotiga to'xtalamiz.

Bizga a va b natural sonlari berilgan bo'lsin. Ma'lumki, agar $a = b \cdot q$ tenglikni qanoatlantiruvchi q soni mavjud bo'lsa, u holda a soni b soniga bo'linadi deyiladi. Bu holda a ni b ning karralisi ham deyiladi.

1.Qoldiqli bo'lish haqidagi teorema. Berilgan$a$ va b natural sonlari uchun $a = b \cdot q + r$,

$0 \leq r < b$ munosabatlarni qanoatlantiruvchi yagona r va q natural sonlari mavgud.

Isboti. Avvalo teoremani qanoatlantiruvchi r va q natural sonlari mavgud ekanligini ko'rsatamiz. a dan katta bo'lmagan va unga eng yaqin turgan b ga karrali sonni bq bilan belgilaymiz. U holda $bq \leq a < b(q+1)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu bu tengsizlikning uchala qismiga $(-bq)$ ni qo'shamiz. U holda quyidagiga ega bo'lamiz: $0 \leq a - bq < b$. Agar bu yerda $a - bq = r$ deb belgilab olsak $a = b \cdot q + r, \quad 0 \leq r < b$ larga ega bo'lamiz.

Endi teoremani qanoatlantiruvchi r va q natural sonlari yagona ekanligini ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik $a = b \cdot q + r, 0 \leq r < b$ munosabatlar bilan birga $a = b \cdot q_1 + r_1, 0 \leq r_1 < b$ munosabatlar ham o‘rinli bo‘lsin, ya’ni teoremani qanoatlantiruvchi r va q natural sonlari bilan birga q_1 va r_1 sonlari ham mavgud bo‘lsin. U holda $a = b \cdot q + r$ tenglikdan $a = b \cdot q_1 + r_1$ tenglikni hadlab ayirsak $0 = b(q - q_1) + (r - r_1)$ tenglik hosil bo‘ladi. Bundan $b(q - q_1) = r_1 - r$. Bu yerda $r_1 - r$ soni b dan kichik bo‘lib b bo‘linadi degan xulosaga kelamiz. Bu esa faqat $r_1 - r = 0$, ya’ni $r_1 = r$ bo‘lsagina bajariladi. U holda $b(q - q_1) = r_1 - r$ tenglikdan $b(q - q_1) = 0$ kelib chiqadi. Bunda $b \neq 0$bo‘lgani uchun ko‘paytma no‘lga teng bo‘lishi uchun ko‘paytuvchilardan biri $q - q_1 = 0$ bo‘lishi kerak. Bundan $q = q_1$. Shunday qilib $q = q_1$ va $r_1 = r$, ya’ni teorema qanoatlantiruvchi r va q natural sonlari yagona ekan.

Shuni ham ta’kidlash kerakki, o’qituvchilar bu teoremani isbotlashdan oldin ham va isbotdan keyin ham bir nechta misollarni o’quvchilar bilan birga tahlil qilsalar materialni o’zlashtirish samaradorligi yuqori bo‘ladi.

Misol uchun $a = 27$ va $b = 5$ bo’lsin, u holda $5 \cdot 5 < 27 < 5 \cdot 6$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu bu tengsizlikning uchala qismiga $(-5 \cdot 5)$ ni qo‘shamiz. U holda quyidagiga ega bo‘lamiz: $0 \leq 27 - 5 \cdot 5 < 5$. Agar bu yerda $27 - 5 \cdot 5 = 2 = r$ deb belgilab olsak $27 = 5 \cdot 5 + 2, \quad 0 \leq 2 < 5$ larga ega bo’lamiz.

2.Endi tub sonlar sonining cheksiz ko‘p ekanligining isbotini keltiramiz.

Teorema. Tub sonlar soni cheksiz ko‘pdir.

Bu teoremaning hozirgi vaqtda bir nechta isboti bor. Shulardan eng qadimiysi va soddasi Evklid (eramizdan avvalgi 325-265 yillarda yashagan qadimgi grek matematigi) isbotidir. Shu isbotni keltirish bilan kifoyalansak bo‘ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilaylik, ya’ni tub sonlar soni chekli k ta bo‘lib barcha tub sonlar $p_1, p_2, \dots, p_k$ lardan iborat bo‘lsin. Ushbu $A = p_1 \cdot p_2 \dots p_k + 1$ sonini qaraymiz. Bu A soni $p_1, p_2, \dots, p_k$ tub sonlarning birortasiga ham bo’linmaydi. Shuning uchun bu A sonining o’zi tub son yoki $p_1, p_2, \dots, p_k$ tub sonlaridan boshqa p_{k+1} tub bo‘luvchiga ega. Bu esa bizning tub sonlar soni chekli k ta bo‘lib barcha tub sonlar $p_1, p_2, \dots, p_k$ lardan iborat bo‘lsin degan farazimizga qarama-qarshi. Bu tub sonlardan boshqa $k + 1$- tub son p_{k+1} ham mavjud ekan. Yuqoridagi mulohazani takrorlasak tub sonlar soni cheksiz ko‘pdir degan tasdiqning to‘g‘ri ekanligi kelib chiqadi.

Agar bu teoremaning isboti quyidagiga o‘xshash misollar bilan mustahkamlansa o‘quvchilaning mavzuni o‘zlashtirishlariga yordam beradi.

Misollar.

1).Tub sonlar soni chekli $k = 4$ ta bo‘lib barcha tub sonlar $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7$ lardan iborat bo‘lsin. U holda $A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$ sonini qaraymiz. $A = 211$ bo‘lib uning o‘zi tub sondir.

Bu yerda o‘quvchilar tomonidan $A = 211$ ning tub son ekanligini qanday bildik degan savol tug‘ilishi mumkin. Bu savolga [1] javob berilgan, ya’ni buning uchun $14 < \sqrt{211} < 15$ ekanligini e’tiborga olib A ni $2, 3, 5, 7, 11, 13$ larga bo‘lib ko‘ramiz. A soni bularning birortasiga ham boʻlinmagani uchun ham [1] da bayon qilinganiga asosan u tub sondir.

Izoh. Bu yerda $A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$ ifodasidan uning $2, 3, 5, 7$ larga boʻlinmasligi koʻrinib turgani uchun tekshirishni faqat $11, 13$ larga boʻlib koʻrish bilan chegaralanish mumkin.

2).Tub sonlar soni chekli $k = 6$ ta boʻlib barcha tub sonlar $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, p_5 = 11, p_6 = 13$ lardan iborat boʻlsin. U holda $A = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1$ sonini qaraymiz. $A = 30031$ boʻlib u 59 tub soniga boʻlinadi.

Birinchi misolimizda tub sonlar koʻpaytmasiga birni qoʻshsak hosil boʻlgan sonining oʻzi tub son boʻldi, ikkinchi misolimizda esa tub sonlar koʻpaytmasiga birni qoʻshsak hosil boʻlgan son koʻpaytmaga kirmagan yangi tub boʻluvchiga ega boʻldi. Shunday qilib, tub sonlarning dastlarki roʻyxatini qanday tanlamaylik yangi tub songa ega boʻlamiz. Bu tub son dastlaki roʻyxatdagi tub sonlardan katta boʻladi, chunki biz dastlabki roʻyxatdagi tub sonlarni eng kichigidan boshlab ketma-ket olgan edik.

3. Endi natural sonlarni tub sonlar koʻpaytmasiga yoyish va yoyilmaning yagonaligi haqidagi arifmetikaning asosiy teoremasi deb ataluvchi teorema va uning isbotiga toʻxtalamizq

Teorema. Har bir $n > 1$ natural sonini tub sonlar koʻpaytmasi koʻrinishida ifodlash mumkin va bu koʻpaytma koʻpaytuvchilarning tartibigacha aniqlik bilan yagonadir.

Isboti. $n > 1$ natural soni berilgab boʻlsin. Har bir $n > 1$ natural sonini tub sonlar koʻpaytmasi koʻrinishida ifodlash mumkin ekanligini isbotlaymiz. Agar n tub son boʻlsa teoremaning oʻrinli ekanligi oʻz-oʻzidan tushunarli. Agarda $n > 1$ murakkab son boʻlsa uning birdan boshqa eng kichik boʻluvchisi p_1 tub sondir ([1] va [3] ga qarang). Shuning uchun ham n ni p_1 ga boʻlib $n = p_1 \cdot n_1$ deb yoza olamiz. Bu yerda n murakkab son boʻlgani uchun ham $n_1 > 1$ boʻladi. Agarda n_1 tub son boʻlsa teorema isbotlangan boʻladi. Agar n_1 murakkab son boʻlsa yuqoridagi mulohazani takrorlaymiz va $n_1 = p_2 \cdot n_2$ ni hosil qilamiz. Bulardan $n = p_1 \cdot n_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2$ ga ega boʻlamiz. Agarda n_2 tub son boʻlsa teorema isbotlangan boʻladi. Agar n_2 murakkab son boʻlsa yuqoridagi mulohazani takrorlaymiz. Bu jarayonni $n_k = 1$ hosil boʻlguncha davom ettiramiz. Chekli qadamdan keyin albatta bu tenglik hosil boʻladi chunki bu yerda $n, \ n_1, n_2, \ldots$ natural sonlar boʻlib $n > \ n_1 > \ n_2 > \cdots$ munosabatlarni qanoatlantiradi. Shunday qilib

$$n = p_1 \cdot n_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot n_2 = \ldots = p_1 \cdot p_2 \cdots p_k \tag{1}$$

tenglik oʻrinli.

Endi (1) yoyilmaning koʻpaytuvchilarning tartibigacha aniqlik bilan yagonaligini koʻrsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $n > 1$ natural soni uchun (1) bilan birga ikkinchi bir

$$n = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s \tag{2}$$

yoyilma ham oʻrinli boʻlsin. (1) va (2) chap tomonlari teng, demak, oʻng tomonlari ham teng boʻlishi kerak. Bundan $p_1 \cdot p_2 \cdots p_k = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s$ yoki

$$p_1(p_2 \cdots p_k) = q_1 \cdot q_2 \cdots q_s. \quad (3)$$

Bu tenglikning chap tomoni p_1 tub soniga boʻlinadi, shuning uchun oʻng tomoni ham p_1 boʻlinishi kerak. $p_1, p_2, \cdots, p_k$ va $q_1, q_2, \cdots, q_s$ lar tub sonlar boʻlgani uchun bu $p_1$tub soni $q_1, q_2, \cdots, q_s$ lardan biriga teng boʻlgandagina oʻrinli boʻladi. Aniqlik uchun $p_1 = q_1$ deb olishimiz mumkin. U holda (3) tenglikning ikkala tomonini p_1 ga qisqartirib

$$p_2(p_3 \cdots p_k) = q_2 \cdot q_3 \cdots q_s. \quad (4)$$

tenglikni hosil qilamiz. (4) tenglik uchun ham (3) tenglikdagi singari mulohaza yuritib $p_2 = q_2$ tenglikni hosil qilamiz. Shu mulohazani takrorlab agar $k < s$ boʻlsa k qadamdan keyin (3) tenglikdan $1 = q_{k+1} \cdot q_{k+2} \cdots q_s$ ni hosil qilamiz. $q_{k+1}, q_{k+2}, \cdots, q_s$ lar tub sonlar boʻlgani uchun bu tenglik oʻrinli boʻla olmaydi. Agarda $k > s$ boʻlsa s qadamdan keyin (3) tenglikdan $p_{s+1} \cdot p_{s+2} \cdots p_s$ ni hosil qilamiz. $p_{s+1}, p_{s+2}, \cdots, p_s$ lar tub sonlar boʻlgani uchun bu tenglik oʻrinli boʻla olmaydi. Shunday qilib $k = s$ va $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2, \ldots, p_k = q_k$ tengliklar oʻrinli boʻlar ekan. Biz yuqorida teskarisini faraz qilagan edik, ya'ni $n > 1$ natural soni uchun (1) bilan birga ikkinchi bir (2) yoyilma ham oʻrinli boʻlsin. Ular koʻpaytuvchilarning tartibigacha aniqlik bilan bir xil ekani.

Misol qaraymiz. $n = 360$ sonini tub koʻpaytuvchilarga ajrating. Bu sonning birdan katta eng kichik boʻluvchisi 2 ga teng. Berilgan sonni 2 ga boʻlib $360 = 2 \cdot 180$ ni hosil qilamiz. 180 soni ham 2 ga boʻlinadi shuning uchun ham$180 = 2 \cdot 90$ deb yoza olamiz. Bu yerdagi 90 soni ham 2 ga boʻlinadi. Shuning uchun ham $90 = 2 \cdot 45$ deb yoza olamiz. 45 ning birdan katta eng kichik boʻluvchisi 3 ga teng, shu sababli $45 = 3 \cdot 15$. Oxirgi tenglikdagi 15 ham 3 ga boʻlinadi, ya'ni uni $15 = 3 \cdot 5$ deb yozish mumkin. 5 tub son boʻlgani uchun jarayon shu joyda tugaydi. Buning natijasida quyidagi yoyilmaga ega boʻldik: $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

(2) yoyilmada koʻpaytuvchilar orasida oʻzaro tenglari ham boʻlishi mumkin. Agar (1) yoyilmada p_1 koʻpaytuvchilar α_1 marta, p_2 koʻpaytuvchilar α_2 marta, va hakazo p_r koʻpaytuvchilar α_r marta ishtiroq etsa (1) ni

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots\ p_r^{\alpha_r} \quad (5)$$

ko'rinishida yozish mumkin. (5) ga n soninning kanonik yoyilmasi deyiladi.

Misol. $n = 360$ sonini kanonik ko'rinishda yozing. Yuqorida qarab chilgan misoga asosan $360 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Keyingi misolni qaraymiz. $n = 720$ sonini tub koʻpaytuvchilarga ajrating. Bu sonning birdan katta eng kichik boʻluvchisi 2 ga teng. Berilgan sonni 2 ga boʻlib $720 = 2 \cdot 360$ ni hosil qilamiz. 360 soni ham 2 ga boʻlinadi shuning uchun ham$360 = 2 \cdot 180$ deb yoza olamiz. Bu yerdagi 180 soni ham 2 ga boʻlinadi. Shuning uchun ham $180 = 2 \cdot 90$ deb yoza olamiz. 90 ni 2 va 45 ning ko'paytmasi sifatida yoza olamiz.45 ning birdan katta eng kichik boʻluvchisi 3 ga teng, shu sababli $45 = 3 \cdot 15$. Oxirgi tenglikdagi 15 ham 3 ga boʻlinadi, ya'ni uni $15 = 3 \cdot 5$ deb yozish mumkin. 5 tub son boʻlgani uchun jarayon shu joyda tugaydi. Buning natijasida quyidagi yoyilmaga ega boʻldik: $720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$.

Misol. $n = 760$ sonini kanonik ko'rinishda yozing. Yuqorida qarab chilgan misoga asosan $720 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Xulosalar. Ma’lumki [4], har bir nazariyani (fanni) tuzishda quyidagicha yo‘l tutiladi. Eng avvalo fanning eng sodda (ta’riflanmaydigan) tushunchalari kiriladi. Keyin esa shu tushunchalarning eng sodda asosiy xossalari (aksiomalar) kiritiladi. Shundan keyin keltirib chiqarish qoidalar (isbotlash usullari) bayon qilinadi hamda qolgan barcha narsalar shularga asoslanib keltirib chiqariladi (isbotlanadi). Matematika o‘qitishda har bir tasdiqni isbotlash muhim hisoblanadi. Fanning mohiyatidan kelib chiqib qoldiqli bo‘lish haqidagi teorema, natural sonlar qatoridagi tub sonlarning cheksiz ko‘p ekanligining isboti, arifmetikaning asosiy teoremasini o‘rganish va o‘quvchilarga sodda tushunarli tilda etkazib berish juda ham muhimdir. Bu o‘quvchilarda matematik qat’iylikni shakllantiradi o‘ziga bo‘lgan ishonchni oshiradi

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR RO‘YXATI:

1. Allakov I., Allakova D.I. O‘rta maktablarning 5 va 6 sinflar matematikasidagi ba’zi tasdiqlarni sonlar nazariyasi usullaridan foydalanib asoslashga doir. SamDU. Raqamli ta’lim texnologiyalari: amaliyot, tajriba, muammo va istiqbollari mavzusidagi respublika ilmiy-amaliy anjuman materiallari to‘plami 4-5 iyul 2023-yil Samarqand-2023

2. Mirzaahmedov M. A. va boshqalar. Matematika 6: 6-sinfi uchun darslik,– «O‘qituvchi» NMIU, 2017. 240b.

3.Allakov I. Sonlar nazariyasidan misol va masalalar. O‘quv qo‘llanma. –T.: “Innovatsion rivojlanish nashriyot matbaa uyi”, 2020. 348b.

4. .Allakov I. Sonlar nazariyasidan misol va masalalar. O‘quv qo‘llanma. –Termiz.: “TerDU nashr-matbaa markazinashriyoti”, 2022. 148b.