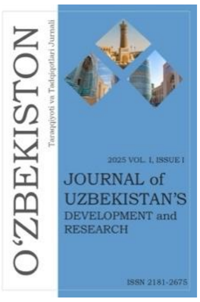

Journal of Uzbekistan's
Development and Research (JUDR)

Journal home page: https://ijournal.uz/index.php/judr

NOKORREKT VA TESKARI MASALALAR FANIDAN TOʻLQIN TENGLAMASI UCHUN DRIXLE MASALASINING KORREKTIV SHARTLARNING BUZILISHI

Omonaliyeva Elinur[1]

Mashrabov Ibrohimjon[2]

Farg'ona davlat unversiteti

KEYWORDS
korrekt, matematik modellashtirish, raqamli hisoblash, toʻlqin tenglamasi, divergens, nokorrekt, xos son, xos funksiya.

ABSTRACT

Ushbu maqolamizda toʻlqin tenglamasi uchun qoʻyilgan Dirixle masalasining korrektivlik shartlari tahlil qilinib, ularning buzilishi oqibatida masalaning nokorrekt holatga oʻtishi oʻrganilgan. Tadqiqot davomida yechimning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligi masalalari koʻrib chiqilgan hamda energiya usuli yordamida yagonalik isbotlangan. Natijalar matematik modellashtirish va raqamli hisoblashlarda yechimning barqarorligini ta'minlash nuqtai nazaridan muhim ahamiyatga egaligi xususida so'z boradi.

2181-2675/© 2025 in XALQARO TADQIQOT LLC.
DOI: **10.5281/zenodo.15658758**

Kirish. Toʻlqin tenglamasi matematik fizikaning asosiy tenglamalaridan biri boʻlib, u turli fizikaviy jarayonlarni modellashtirishda keng qoʻllaniladi. Ushbu ishda aynan toʻlqin tenglamasi uchun qoʻyilgan Dirixle masalasining korrektiv shartlari va ularning buzilishi oqibatlari oʻrganiladi. Masalaning nokorrekt holga oʻtishi yechimning mavjud emasligi, yagonalikning yoʻqligi yoki barqarorlikning buzilishiga olib kelishi mumkin. Ayniqsa, chegaraviy shartlarning toʻliq bajarilishi, xususan Dirixle sharti, masalaning korrektivligi uchun muhim omil hisoblanadi. Shu nuqtai nazardan, ushbu tadqiqot toʻlqin jarayonlarini tahlil qilishda muhim nazariy va amaliy ahamiyatga ega.

Aytaylik, $D = \{0 < x < p, 0 < t < ap\}$ (x,t) tekisligida berilgan soha, bu yerda α - doimiy musbat son $U(x,t) \mathrm{O}(D)$ funksiyani toʻlqin tenglamasi uchun Dirixle masalasining yechimi deb ataymiz, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

$$U_{tt} - a^2 U_{xx} = 0 \qquad (1)$$

[1] Fargʻona davlat unversiteti talabasi
[2] Fargʻona davlat unversiteti talabasi

$$U_t(x,0) = j\ (x), U(x,T) = y\,(x), 0\,\mathrm{J}\ \ x\,\mathrm{J}\ \ T \qquad (2)$$

$$U(0,t) = U(l,t) = 0, 0\,\mathrm{J}\ \ t\,\mathrm{J}\ \ l \qquad (3)$$

bu yerda $j\ (x)$, $y\,(x)$ uzluksiz funksiyalar. (1)-(3) masala yechimining $\{j\ , y\ , a\}$ boshlang‘ich berilganlarga uzluksiz bog‘liqligi yo‘q. $U(x,t)$ funksiya topilsin.

Yechimni quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

Xos funksiyalarni topish uchun o'zgaruvchilarni ajratish usulini qo'llaymiz:

$$U(x,t) = X(x)T(t) \qquad (4)$$

Tenglamaga qo'yamiz:

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t)$$

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\ l$$

Bu bizga ikkita oddiy differensial tenglama beradi.

1. Fazoviy qism:

$$X''(x) + l\ X(x) = 0 \qquad (5)$$

2. Vaqt qismi:

$$T''(t) + l\ a^2 T(t) = 0 \qquad (6)$$

Fazoviy tenglama uchun xos qiymatlar masalasini yechamiz.

a) $l\ < 0$ holatida:

$$X(x) = Ae^{\sqrt{-\ l\ x}} + Be^{\sqrt{-\ l\ x}}$$

Chegaraviy shartlarni qo'llasak:

$$X(0) = A + B = 0$$

$$X(l) = Ae^{\sqrt{-\ l\ x}} + Be^{-\ \sqrt{-\ l\ x}} = 0$$

Bu faqat A=B=0 da bajariladi. Bu biz uchun ahamiyatsiz yechim.

b) $l\ = 0$ holatida:

$$X(x) = Ax + B$$

Chegaraviy shartlarni qo'llasak:

$$X(0) = B = 0$$

$$X(l) = Al = 0\ ®\ \ A = 0$$

Bu yechim ham biz uchun kerak emas.

c) $l\ > 0$ holatida:

$$X(x) = A\cos(\sqrt{l}\ x) + B\sin(\sqrt{l}\ x)$$

Yana chegaraviy shartlarni qo‘llasak:

$$X(0) = A = 0$$

$$X(l) = B\sin(\sqrt{l}\ l) = 0$$

Rtivial bo‘lmagan yechim uchun:

$$\sin(\sqrt{\lambda}\, l) = 0 \rightarrow \sqrt{\lambda}\, l = \pi k, k = 1,2,3,\dots$$

$$\lambda_k = \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2$$

Xos sonni topib oldik. Endi esa Xos funksiyani topamiz.

$$X_k(x) = \sin\left(\frac{\pi k x}{l}\right), k = 1,2,3,\dots$$

Har bir λ_k uchun vaqt tenglamasini tuzamiz. λ_k ni olib borib (6) formulaga qo‘yamiz.

$$T_k''(t) + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 T_k(t) = 0 \qquad (7)$$

Har bir λ_k uchun vaqt tenglamasini tuzganimizdan so‘ng umumiy tenglamasini ham tuzib olamiz, ya’ni (7) tenglikni (4) tenglikka olib borib qo‘yamiz:

$$T_k(t) = a_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, at + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, at,$$

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k \cos\sqrt{\lambda_k}\, at + b_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, at\right]\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}\, x, k \in N \qquad (8)$$

Umumiy tenglamani tuzib olganimizdan keyin uni boshlang‘ich shartlarga qo‘yamiz . a_k va b_k larni topib olamiz.

$$U_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\sqrt{\lambda_k}\, a \sin\sqrt{\lambda_k}\, at + b_k\sqrt{\lambda_k}\, a\cos\sqrt{\lambda_k}\, at\right]\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}\, x, k \in N$$

$$U_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\sqrt{\lambda_k}\, a * 0 + b_k\sqrt{\lambda_k}\, a * 1\right]\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}\, x = \varphi(x), k \in N,$$

$$\varphi_k = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \varphi(x)\sin\sqrt{\lambda_k}\, x\,dx \rightarrow \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{l}}\varphi_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, x\,dx,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[-a_k * 0 + b_k * 1\right]\sqrt{\lambda_k}\, a\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}\, x = \sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{l}}\varphi_k \sin\sqrt{\lambda_k}\, x,$$

$$b_k = \frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}\, a} = \frac{l}{a\pi k}, \quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (9)$$

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{k\pi a t}{l}\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (10)$$

b_k ni topib oldik. Endi a_k ni b_k orqali topib olamiz.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_k\cos\sqrt{\lambda_k}aT+b_k\sin\sqrt{\lambda_k}aT\right]\sqrt{\lambda_k}a\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}x=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{l}}\psi_k\sin\sqrt{\lambda_k}x,$$

$$a_k=\frac{\psi_k}{\cos\sqrt{\lambda_k}aT}-\frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}a}tg\sqrt{\lambda_k}aT. \qquad (11)$$

a_k va b_k larni topib oldik. Endi (9) va (11) tengliklarni olib borib U(x,t) funksiyaga qo'yamiz.

$$U(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{\psi_k}{\cos\sqrt{\lambda_k}aT}-\frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}a}tg\sqrt{\lambda_k}aT\right)\sqrt{\lambda_k}a\sin\sqrt{\lambda_k}at+\left(\frac{\varphi_k}{\sqrt{\lambda_k}a}\right)\sqrt{\lambda_k}a\cos\sqrt{\lambda_k}at\right]\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}x$$

Yuqoridagi U(x,t) funksiyani soddalashtirib qo'yamiz.

$$U_k(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\sqrt{\lambda_k}x \rightarrow U(x,t)=\frac{l}{\pi a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Bu qator yaqinlashmaydi, chunki $\frac{1}{k}$ qatori divergens.

Yuqoridagi masalani endi yagonalik shartiga tekshiramiz.

Teorema: Berilgan boshlang'ich va chegaraviy shartlar uchun to'lqin tenglamasining Dirixle masalasi yagona yechimga ega.

Isbot:

Faraz qilaylik, U_1 va U_2 ikkita yechim bo'lsin. $U=U_1-U_2$ ayirma uchun

$U_{tt}-a^2U_{xx}=0$ funksiya,

$U(0,t)=U(l,t)=0$ chegaraviy va

$U_t(x,0)=0, U(x,0)=0$ boshlang'ich shartlar berilgan bo'lsin.

Energiya usuli orqali energiya funksionalini aniqlaymiz:

$$E(t)=\int_0^l\left(U^2{}_t+a^2U^2{}_x\right)$$

Energiyaning o'zgarishini hisoblaymiz:

$$\frac{dE}{dt}=\int_0^l\left(U_{tt}U_t+a^2U_xU_{xt}\right)dx=a^2\int_0^l\frac{\partial}{\partial x}\left(U_tU_x\right)dx=a^2\left[U_tU_x\right]_0^l=0$$

Demak, $E(t)=const=E(0)=0$, $E(t)=0 \Rightarrow U_t=0$ va $U_x=0 \Rightarrow U=const$ ekanligi kelib chiqadi. Yuqoridagi masalaning yagona yechimi mavjud. Ammo bu masala turg'unlik shartini bajarmaydi.

Xulosa

Ushbu ishda to'lqin tenglamasi uchun Dirixle masalasining korrektivlik shartlari tahlil qilindi va bu shartlarning buzilishi natijasida masalaning nokorrekt holatga o'tishi ko'rsatildi. Tadqiqot natijalariga ko'ra, boshlang'ich va chegaraviy shartlarning to'liq bajarilishi yechimning mavjudligi, yagonaligi va barqarorligini ta'minlaydi. Dirixle shartining buzilishi esa yechim sezuvchanligini oshirib, amaliy hisoblarda jiddiy xatolarga olib kelishi mumkin. Shuningdek, energiya usuli yordamida masalaning yagonaligi isbotlandi. Bu natijalar matematik modellashtirish va raqamli hisoblashlarda muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu maqola “Nokorrekt va teskari masalalar” fanidan mustaqil ta’lim sifatida yozildi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. K.S.Fayazov, I.O.Xajiyev - Nokorrekt va teskari masalalar
2. Sergey I. Kabanikhin – *Inverse and Ill-posed Problems: Theory and Applications*
3. Albert Tarantola – *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*
4. Michael S. Zhdanov – *Geophysical Inverse Theory and Regularization Problems*